

2021







تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

إعداد وتصميم



معلم أول رياضيات



01202560239







◆ الوحدة الأولى : المعادلات

◆ الوحدة الثانية : الكسور الجبرية

◆ الوحدة الثالثة : الإحصاء



التحليل بإخراج العامل المشترك

❖ س^٢ – ٤ س = س (س – ٤)
❖ ٣س – ١٥ = ٣ (س – ٥)
❖ ٤ص + ٢٤ = ٤ (ص + ٦)
❖ س^٤ – س = س (س^٣ – ١)
❖ ٢س^٣ + ٦س = ٢س (س^٢ +٣)
❖ س^٣ – س^٢ + س = س (س^٢ – س + ١)

◆ س^٢ – ٢س = ...
◆ س^٢ – س = ...
◆ ٢س - ٦ = ...
◆ س^٣ – س^٢ = ...
◆ ٢س^٣ – ١٨س = ...
◆ س^٤ + س^٣ + س^٢ = ...

الفرق بين مربعين

أعداد لها جذور تربيعية مثل:
١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ٤٩

هو عبارة عن حدين لهما جذور تربيعية وبينهم (–) مثل : س^٢ – ٢٥ ولو لقيت بينهم (+) ملوش تحليل

تحليل الفرق بين مربعين = (√الأول – √الثانى) (√الأول + √الثانى)

❖ س^٢ – ٤ = (س – ٢) (س + ٢)
❖ س^٢ – ١ = (س – ١) (س + ١)
❖ ٤س^٢ – ٩ = (٢س – ٣) (٢س + ٣)
❖ ص^٢ – ٨١ = (ص – ٩) (ص + ٩)

◆ س^٢ – ٩ = ...
◆ س^٢ – ١٦ = ...
◆ س^٢ – ٣٦ = ...
◆ ص^٢ – ٢٥ = ...

مجموع مكعبين والفرق بينهما

الأعداد التي لها جذور تكعيبية مثل:
١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ١٢٥

❖ س^٣ – ١ = (س – ١) (س^٢ + س +١)
❖ س^٣ + ١ = (س + ١) (س^٢ – س +١)

◆ س^٣ – ٢٧ = ...
◆ س^٣ + ٨ = ...

تحليل المقدار الثلاثى البسيط س^٢+ ب س+ جـ

<u>قاعدة الإشارات:</u> إذا كانت إشارة الأخير (+) يبقى الإشارتين زى إشارة الأوسط
إذا كانت إشارة الأخير (-) يبقى الإشارتين مختلفتين والرقم الأكبر ياخد إشارة الأوسط

❖ س^٢ +٥س +٦ = (س + ٢) (س + ٣)
❖ س^٢ – ٣س +٢ = (س – ٢) (س – ١)
❖ س^٢ + س – ١٢ = (س + ٤) (س – ٣)
❖ س^٢ – ٢س – ١٥ = (س – ٥) (س + ٣)

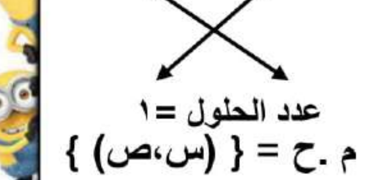
◆ س^٢ +٤س +٤ = ...
◆ س^٢ – ٦س +٩ = ...
◆ س^٢ + س –٦ = ...
◆ س^٢ – س + ١ = ...



الدرس الأول 1 — حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين

إذا كان المعادلتين على الصورة : $أ_1 س + ب_1 ص = جـ_1$ ، $أ_2 س + ب_2 ص = جـ_2$ فإن :

لهما حل وحيد	لهما عدد لا نهائى	ليس لهما حلول
إذا كان $\frac{أ_1}{أ_2} \neq \frac{ب_1}{ب_2}$	إذا كان $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$	إذا كان $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} \neq \frac{جـ_1}{جـ_2}$
أو: المستقيمان متقاطعان	أو المستقيمان منطبقان	أو المستقيمان متوازيان
عدد الحلول = ١	م.ح = { (س،ص): اكتب أي معادلة من الاتنين }	م.ح = Φ
م.ح = { (س،ص) }		عدد الحلول = ٠





الحل الجبرى بطريقة الحذف

① اجعل المعادلتين على الصورة أ س + ب ص = جـ (*الحد المطلق لوحده بعد =*)

② خلى معاملات السينات متشابهة أو معاملات الصادات متشابهة (*بضرب المعادلة كلها في رقم*)

③ اكتب المعادلتين في صورة أفقية تحت بعض (*اتأكد ان السينات تحت بعض والصادات تحت بعض وهكذا*)

④ لو المتشابهين ليهم نفس الإشارة أطرح المعادلتين ولو إشاراتهم مختلفة اجمع المعادلتين.

⑤ هات قيمة المجهول وعوّض عنها في أي معادلة هتجيلك قيمة المجهول التانى.

الحل الجبرى بطريقة التعويض

① من إحدى المعادلتين هات قيمة ص بدلالة س أو قيمة س بدلالة ص

② عوّض في المعادلة الثانية بالقيمة اللى جبتها ③ فك الأقواس واجمع المتشابه

④ احسب قيمة المجهول وعوّض بيها في أي معادلة هتجيلك قيمة المجهول الثانى

مثال على طريقة التعويض: حل المعادلتين س + ص = ٤ ، س + ٢ص = ٥

الحل ص = ٤ − س بالتعويض في الثانية ∴ س + ٢ (٤ − س) = ٥ س + ٨ − ٢س = ٥

− س = −٣ ∴ س = ٣ بالتعويض في الأولى ∴ ص = ٤ − ٣ = ١ م.ح = { (٣ ، ١) }



١ أوجد مجموعة حل المعادلتين :

٢س ـ ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤

الحل

بضرب المعادلة الأولى × ٢

٤س ـ ٢ص = ٦
س + ٢ص = ٤ (+) بالجمع

٥س = ١٠

∴ س = ٢ بالتعويض في المعادلة الثانية

٢ + ٢ص = ٤ ⇐ ٢ص = ٢ ⇐ ص = ١

م . ح = { (٢ ، ١) }

٢ أوجد مجموعة حل المعادلتين :

٣س + ٤ص = ٢٤ ، س ـ ٢ص + ٢ = ٠

الحل نظبط شكل المعادلة الثانية : س ـ ٢ص = ـ٢

بضرب المعادلة الثانية × ٣

٣س ـ ٦ص = ـ٦
٣س + ٤ص = ٢٤ (ـ) بالطرح

ـ١٠ص = ـ٣٠

∴ ص = ٣ بالتعويض في المعادلة الثانية

س ـ ٢×٣ +٢ = ٠ ⇐ س ـ ٤ = ٠ ∴ س = ٤

م . ح = { (٤ ، ٣) }

ملحوظة لما تطرح إطرح الرقمين بإشارتهم : يعنى مثلا في مثال ٢ هتقول : ـ٦ ـ ٤ نفس الكلام في الجمع ،، خلاصة الكلام اتعامل مع الأرقام بإشاراتها

٣ أوجد قيمتى أ ،ب علمًا بأن (٣، ـ١) حلا للمعادلتين:

أ س + ب ص ـ ٥ = ٠ ، ٣أ س + ب ص = ١٧

الحل

∵ (٣ ، ـ١) حل للمعادلة أ س + ب ص ـ ٥ = ٠

نعوض عن س = ٣ ، ص = ـ١

∴ أ×٣ +ب×ـ١ ـ ٥ = ٠ ∴ ٣أ ـ ب = ٥ ← (١)

∵ (٣ ، ـ١) حل للمعادلة ٣أ س + ب ص = ١٧

نعوض عن س = ٣ ، ص = ـ١

٣أ×٣ + ب×ـ١ = ١٧ ∴ ٩أ ـ ب = ١٧ ← (٢)

٩أ ـ ب = ١٧
٣أ ـ ب = ٥ (ـ) بالطرح

٦أ = ١٢

∴ أ = ٢ بالتعويض في ١

∴ ٣×٢ ـ ب =٥

∴ ٦ ـ ب =٥ ∴ ب = ١

٤ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم ، فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم فأوجد مساحته.

الحل

نفرض أن الطول = س والعرض = ص

∵الطول يزيد عن العرض ∴ الطول ـ العرض = الزيادة

∴ س ـ ص = ٤

∵ المحيط = ٢٨ ، ∵محيط المستطيل = ٢(الطول+العرض)

∴ ٢ (س + ص) = ٢٨ بالقسمة على ٢

∴ س + ص = ١٤

س ـ ص = ٤
س + ص = ١٤ (+) بالجمع

٢ س = ١٨ ∴ س = ٩

بالتعويض في س ـ ص = ٤

∴ ٩ ـ ص = ٤ ∴ ص = ٥

المساحة = الطول × العرض = ٩ × ٥ = ٤٥ سم^2

١ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

س + ٣ص = ٧ ، ٥س ـ ص = ٣

الحل

٢ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

٣س + ٤ص = ١١ ، ٢س + ص ـ ٤ = ٠

الحل

الحل البيانى

- ◆ مجموعة حل معادلتين من الدرجة الأولى بيانيا هي: نقطة تقاطع المستقيمين
- ◆ إذا توازى المستقيمان فإن م . ح = Φ
- ◆ إذا انطبق المستقيمان فإن مجموعة الحل هي: {(س ، ص) : واكتب أي معادلة من الاتنين }

١ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين بيانيا :

ص = س + ٤ ، س + ص = ٤

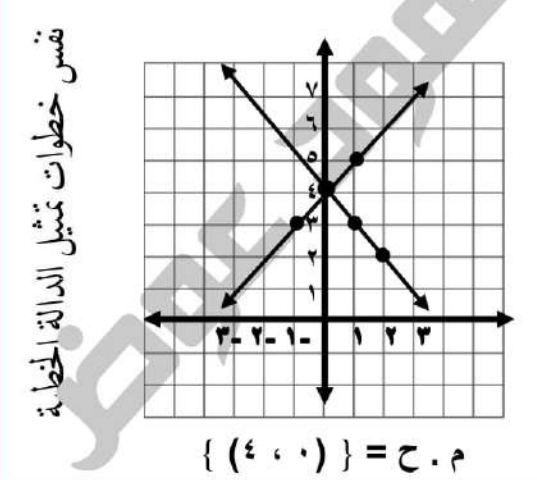
الحل

ص = س + ٤

س	١-	٠	١
ص	٣	٤	٥

ص = ٤ ـ س

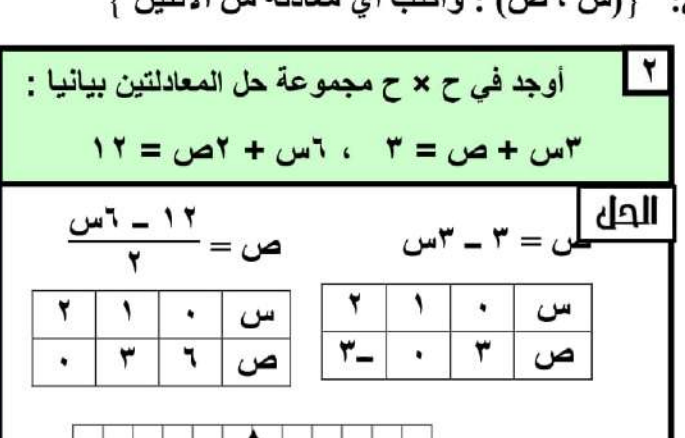
س	٠	١	٢
ص	٤	٣	٢



م . ح = { (٠ ، ٤) }

٢ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين بيانيا :

٣س + ص = ٣ ، ٦س + ٢ص = ١٢



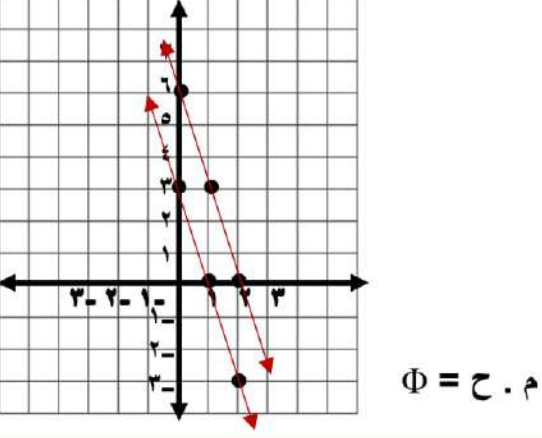
الحل

ص = ٣ ـ ٣س

س	٠	١	٢
ص	٣	٠	٣-

$ص = \frac{١٢ ـ ٦س}{٢}$

س	٠	١	٢
ص	٦	٣	٠



م . ح = Φ







اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ نقطة تقاطع المستقيمان ص = ٢ ، س + ص = ٦ هي ....

أ) (٢ ، ٦) ب) (٢ ، ٤) جـ) (٤ ، ٢) د) (٦ ، ٢)

٢ مجموعة حل المعادلتين س ـ ٢ص = ١ ، ٣س + ص = ١٠ هي ....

أ) { (٥ ، ٢) } ب) { (٢ ، ٤) } جـ) { (١ ، ٣) } د) { (٣ ، ١) }

٣ عدد حلول المعادلتين س + ص = ٢ ، ص + س = ٣ هو ....

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) ٣

الحل $\frac{أ_١}{أ_٢} = ١$ ، $\frac{ب_١}{ب_٢} = ١$ ، $\frac{جـ_١}{جـ_٢} = \frac{٢}{٣}$ ∵ $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} \neq \frac{جـ_١}{جـ_٢}$ ∴ عدد الحلول = صفر أى : م.ح = Φ

٤ إذا كان للمعادلتين س + ٤ص = ٧ ، ٣س + ك ص = ٢١ عدد لا نهائي من الحلول فإن ك =.......

أ) ٤ ب) ٧ جـ) ١٢ د) ٢١

الحل ∵ للمعادلتين عدد لا نهائي من الحلول ∴ $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$ ∴ $\frac{١}{٣} = \frac{٤}{ك}$ (مقص) ∴ ك = ١٢

٥ إذا كان للمعادلتين س + ٢ص = ١ ، ٢س + ك ص = ٢ حل وحيد فإن ك لا يمكن أن تساوى .....

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

الحل $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢}$ ∴ $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{ك}$ (مقص) ∵ للمعادلتين حل وحيد ∴ ك لا يمكن أن تساوى ٤

٦ المستقيمان ٣س + ٥ص = صفر ، ٥س ـ٣ص = صفر يتقاطعان فى ....

أ) الربع الأول ب) الربع الثانى جـ) <u>نقطة الأصل</u> د) الربع الثالث

٧ إذا كان المستقيمان س + ٣ص = ٤ ، س + أ ص = ٧ متوازيين فإن أ = ...

أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٧

---

١ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين ٢س + ص = ١ ، س + ٢ص = ٥

٢ أوجد في ح^٢ مجموعة حل المعادلتين س + ٢ ص = ٨ ، ٣ س + ص = ٩

٣ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين ص = ١ ـ ٢س ، س + ٢ص = ٥

٤ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين س = ص + ٤ ، ٣ س + ٢ص = ٧

٤ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠ ، أوجد قياسهما

٥ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم فإذا كان محيطه ٢٢ سم فأوجد مساحته.

٦ أوجد بيانيا مجموعة حل المعادلتين ص = ٢س - ٣ ، س + ٢ص = ٤

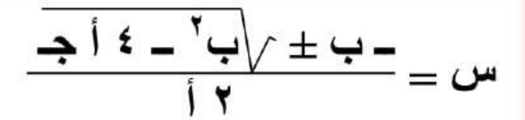


الدرس الثانى 2 — حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

إذا كانت المعادلة على الصورة : أ $س^٢$ + ب س + جـ = ٠ هنستخدم القانون العام:

القانون العام





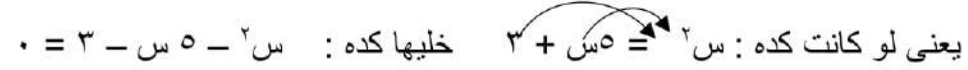
$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$



أ : معامل $س^٢$
ب: معامل س
جـ : الحد المطلق

خطوات حل المعادلة :

١ خلى المعادلة على الصورة أ س + ب ص + جـ = صفر (وديهم كلهم قبل يساوى)

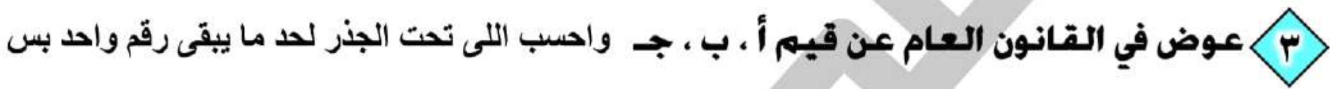


يعنى لو كانت كده : $س^٢$ = ٥س + ٣ خليها كده : $س^٢$ – ٥ س – ٣ = ٠



٢ خد من المعادلة قيم أ ، ب ، جـ بإشارتهم **الموجودة في المعادلة**

يعنى لو المعادلة كده $س^٢$ – ٥س – ٣ = ٠ يبقى أ = ١ ، ب = –٥ ، جـ = –٣



٣ عوض في القانون العام عن قيم أ ، ب ، جـ واحسب اللى تحت الجذر لحد ما يبقى رقم واحد بس

زى كده س $= \frac{٥ \pm \sqrt{(-٥)^٢ - ٤ \times ١ \times -٣}}{٢ \times ١} = \frac{٥ \pm \sqrt{٣٧}}{٢}$

٤ افصل الناتج مرة بالـ (+) ومرة بالـ (–) واحسب القيمتين بالآلة الحاسبة

زى كده : س $= \frac{٥ + \sqrt{٣٧}}{٢} = ٢,٥٤١$ و س $= \frac{٥ - \sqrt{٣٧}}{٢} = -٠,٥٤١$

٥ اكتب الناتجين في مجموعة الحل

زى كده : م . ح = { ٢,٥٤١ ، – ٠,٥٤١ }

ملاحظات

ملحوظة ١ : شايف – ب اللى فوق في القانون؟ دى معناها انك تعوض عن ب بس بإشارة مختلفة

ملحوظة ٢ : شايف ٢أ اللى في المقام ؟ شايفها؟ لا دى مفيهاش حاجة ، بس كويس انك شايفها

ملحوظة ٣ : إذا كان المميز $ب^٢$ – ٤أ جـ > صفر (موجب) فإن المعادلة لها جذران
وإذا كان $ب^٢$ – ٤أ جـ < صفر (سالب) فإن المعادلة ليس لها حلول ، أي م . ح = Φ
وإذا كان $ب^٢$ – ٤أ جـ = صفر فإن المعادلة لها جذر واحد (أو جذران متساويان)

١ باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية في ح : ٣س^{٢} ـ ٥س + ١ = ٠ مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين

الحل

أ = ٣
ب = ـ٥
جـ = ١

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$س = \frac{٥ \pm \sqrt{٥^{٢} - ٤ \times ٣ \times ١}}{٢ \times ٣}$$

$$= \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ١٢}}{٦} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$$

إما $س = \frac{٥ + \sqrt{١٣}}{٦}$ ∴ س ≅ ١,٤٣

أو $س = \frac{٥ - \sqrt{١٣}}{٦}$ ∴ س ≅ ٠,٢٣

∴ م . ح = { ١,٤٣ ، ٠,٢٣ }

٢ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة س^{٢} ـ ٤س + ١ = ٠ مقربا الناتج لرقمين عشريين

الحل

أ = ١
ب = ـ٤
جـ = ١

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$س = \frac{٤ \pm \sqrt{٤^{٢} - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٢}}{٢}$$

إما $س = \frac{٤ + \sqrt{١٢}}{٢}$ ∴ س ≅ ٣,٧٣

أو $س = \frac{٤ - \sqrt{١٢}}{٢}$ ∴ س ≅ ٠,٢٧

∴ م . ح = { ٣,٧٣ ، ٠,٢٧ }

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة س (س ـ ١) = ٤ باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لثلاثة أرقام

الحل

الأول لازم نضرب الـ س في القوس

س^{٢} ـ س = ٤ ← س^{٢} ـ س ـ ٤ = ٠

أ = ١
ب = ـ١
جـ = ـ٤

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{١^{٢} - ٤ \times ١ \times -٤}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{١ \pm \sqrt{١ - -١٦}}{٢} = \frac{١ \pm \sqrt{١٧}}{٢}$$

إما $س = \frac{١ + \sqrt{١٧}}{٢}$ ∴ س ≅ ٢,٥٦٢

أو $س = \frac{١ - \sqrt{١٧}}{٢}$ ∴ س ≅ ـ ١,٥٦٢

∴ م . ح = { ٢,٥٦٢ ، ـ ١,٥٦٢ }

٤ أوجد مجموعة حل المعادلة (س ـ ٣)^{٢} ـ ٥س = ٠ مقربًا الناتج لرقمين عشريين

الحل



الأول لازم نفك القوس

س^{٢} ـ ٦س + ٩ ـ ٥س = ٠

س^{٢} ـ ١١س + ٩ = ٠

أ = ١
ب = ـ١١
جـ = ٩

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$= \frac{١١ \pm \sqrt{١١^{٢} - ٤ \times ١ \times ٩}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{١١ \pm \sqrt{١٢١ - ٣٦}}{٢} = \frac{١١ \pm \sqrt{٨٥}}{٢}$$

إما $س = \frac{١١ + \sqrt{٨٥}}{٢}$ ∴ س ≅ ١٠,١١

أو $س = \frac{١١ - \sqrt{٨٥}}{٢}$ ∴ س ≅ ٠,٨٩

∴ م . ح = { ١٠,١١ ، ٠,٨٩ }

١ أوجد مجموعة حل المعادلة $٢س^٢ - ٥س + ١ = ٠$

باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد

الحل

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

أ = ...

ب = ...

جـ = ...

$س = \frac{...... \pm \sqrt{....^٢ - ....×....×....}}{٢ × .....}$

$= \frac{.... \pm \sqrt{.... - ....}}{.....} = \frac{.... \pm \sqrt{....}}{.....}$

إما $س = \frac{.... + \sqrt{....}}{.....}$ أو $س = \frac{.... - \sqrt{....}}{.....}$

∴ س ≅ .... ∴ س ≅ ....

∴ م . ح = { ٢,٣ ، ٠,٢ } اتأكد بالآلة

٢ أوجد مجموعة حل المعادلة $س^٢ - س = ٤$

باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد

الحل

مساعدة : اوعى تنسى تنقل الـ ٤ قبل = بإشارة مخالفة

....

....

....

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة $٢س^٢ = ٤س - ١$

باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقمين عشريين

الحل

....

....

....

٤ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة

$\frac{٨}{س^٢} + \frac{١}{س} = ١$

الحل

مساعدة : للتخلص من الكسور اضرب المعادلة كلها × $س^٢$

....

....

....

الحل البيانى لمعادلة الدرجة الثانية

◆ مجموعة حل معادلة من الدرجة الثانية بيانيا هي : **قيم س التى يقطعها المنحنى من محور السينات**

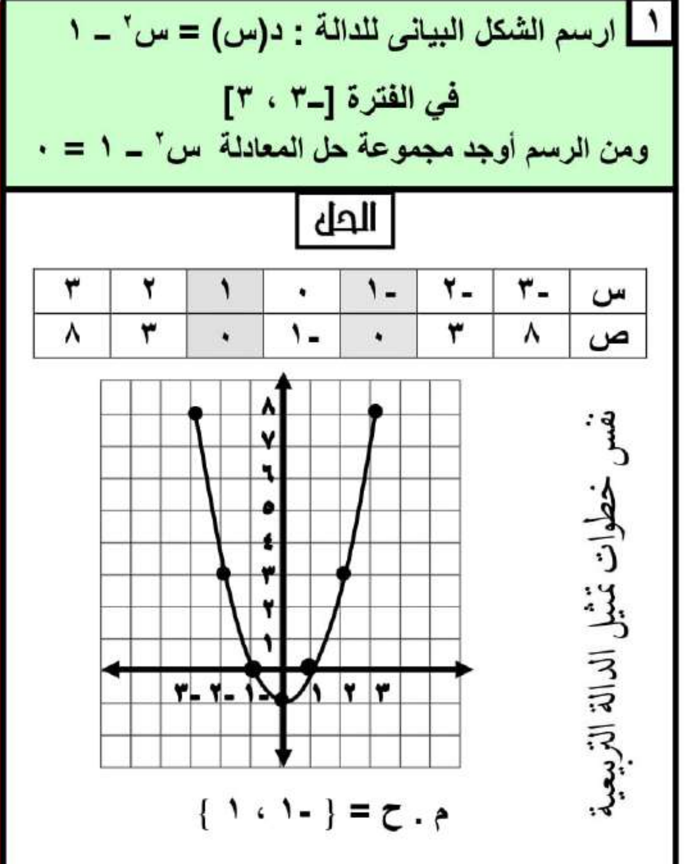
◆ إذا لم يقطع المنحنى محور السينات فإن م . ح = Φ

١ ارسم الشكل البيانى للدالة : د(س) = س^{٢} − ١ في الفترة [−٣ ، ٣]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} − ١ = ٠

الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	٨	٣	٠	-١	٠	٣	٨



نفس خطوات تمثيل الدالة التربيعية

م . ح = { -١ ، ١ }

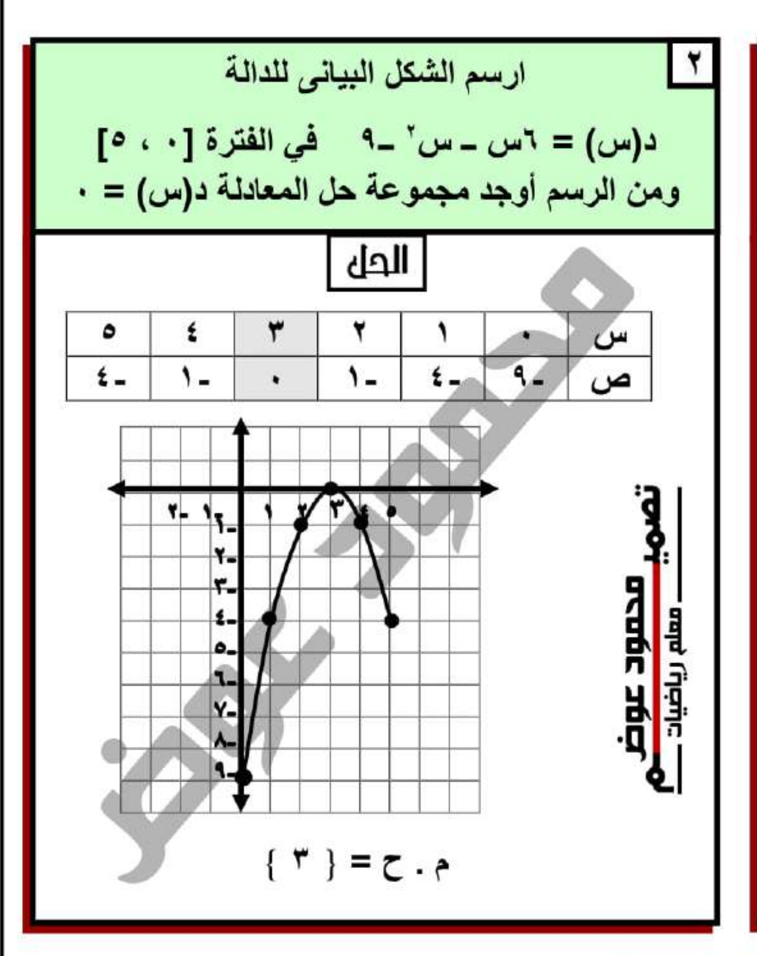
٢ ارسم الشكل البيانى للدالة

د(س) = ٦س − س^{٢} −٩ في الفترة [٠ ، ٥]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠

الحل

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	-٩	-٤	-١	٠	-١	-٤



م . ح = { ٣ }

2 تمارين

١ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة س^{٢} - ٢س - ٦ = ٠ مقربا الناتج لرقم عشرى واحد.

١ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة ٣س^{٢} - ٦س − ١ = ٠ مقربا الناتج لثلاثة أرقام عشرية

١ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة س (س − ٥) + ٣ = ٠ مقربا الناتج لثلاثة أرقام عشرية

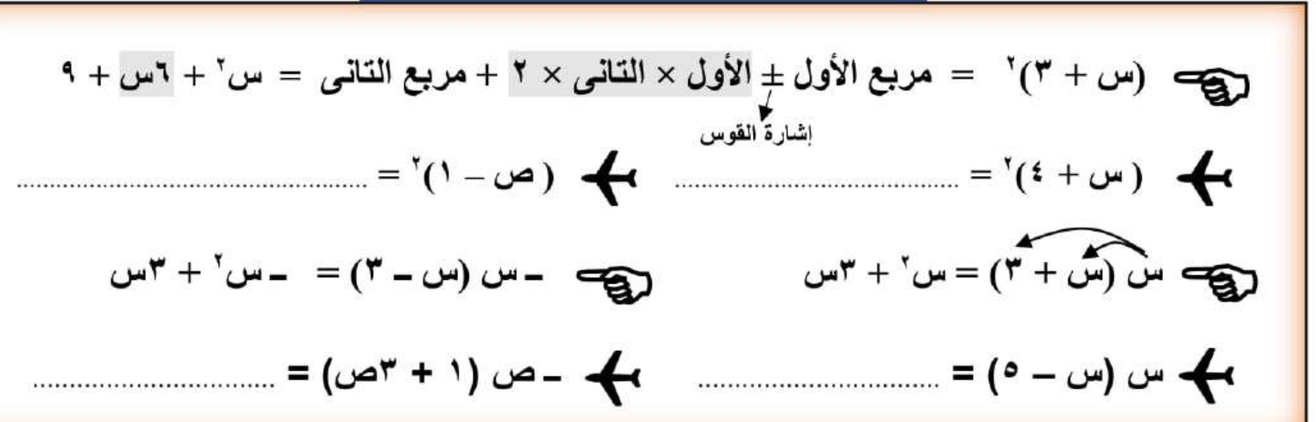
١ ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د(س) = س^{٢} − ٢س − ٤ في الفترة [-٢ ، ٤]
ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} − ٢س − ٤ = ٠

الدرس الثالث 3
حل معادلتين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية

- ابدأ بمعادلة الدرجة الأولى وهات قيمة ص بدلالة س أو قيمة س بدلالة ص
- عوّض في معادلة الدرجة الثانية عن القيمة اللى انت جبتها
- فك الأقواس
- جمع المتشابه (وخلى المعادلة = ٠)
- التحليل (ولو لقيت رقم عامل مشترك اقسم عليه قبل التحليل)
- إما ـ أو (وهات قيمتين للمجهول)
- عوض عن القيمتين في معادلة الدرجة الأولى وهات قيمتين للمجهول التانى



تدريب على فك الأقواس



تدريب على جمع المتشابه

- ❑ ١ + ٢ص + ص^٢ + ص^٢ ـ ٢٥ = ...
- ❑ ١ + ٤ص + ٤ص^٢ ـ ص ـ ٢ص^٢ = ...
- ❑ ص^٢ + ٢٠ص + ١٠٠ ـ ٤ص^٢ ـ ٤٠ص + ص^٢ ـ ٥٢ = ...
- ❑ س^٢ + س^٢ + ٦س + ٩ ـ س^٢ ـ ٣س ـ ١٣ = ...
- ❑ ص^٢ + ص^٢ + ص^٢ = ...

ملحوظة : س ص = ٩ هي معادلة من الدرجة الثانية وليست من الدرجة الأولى



١ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين : س ـ ص = ١ ، س^٢^ + ص^٢^ = ٢٥

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : س = ١ + ص

بالتعويض عن س = (١ + ص) في معادلة الدرجة الثانية

∴ (١ + ص)^٢^ + ص^٢^ = ٢٥ — نفك الأقواس

١ + ٢ص + ص^٢^ + ص^٢^ ـ ٢٥ = ٠ — نجمع المتشابه

٢ص^٢^ + ٢ص ـ ٢٤ = ٠ — بالقسمة على ٢

ص^٢^ + ص ـ ١٢ = ٠ — بالتحليل

(ص + ٤) (ص ـ ٣) = ٠

إما ص + ٤ = ٠ ∴ ص = ـ٤ | أو ص ـ ٣ = ٠ ∴ ص = ٣

بالتعويض في المعادلة س = ١ + ص

∴ س = ١ + ـ٤ ∴ س = ـ٣ | ∴ س = ١ + ٣ ∴ س = ٤

م . ح = { (ـ٣ ، ـ٤) ، (٤ ، ٣) }

٢ أوجد في ح^٢^ مجموعة حل المعادلتين : س ـ ص = صفر ، س^٢^ + س ص + ص^٢^ = ٢٧

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : س = ص

بالتعويض عن س = ص في معادلة الدرجة الثانية

∴ ص^٢^ + ص^٢^ + ص^٢^ = ٢٧ — نجمع المتشابه

٣ص^٢^ = ٢٧ ⇐ ٣ص^٢^ ـ ٢٧ = ٠ — بالقسمة على ٣

ص^٢^ ـ ٩ = ٠ — بالتحليل

(ص + ٣) (ص ـ ٣) = ٠

إما ص + ٣ = ٠ ∴ ص = ـ٣ | أو ص ـ ٣ = ٠ ∴ ص = ٣

بالتعويض في المعادلة س ـ ص = ٠

∴ س ـ ـ٣ = ٠ ∴ س = ـ٣ | ∴ س ـ ٣ = ٠ ∴ س = ٣

م . ح = { (ـ٣ ، ـ٣) ، (٣ ، ٣) }

٣ أوجد مجموعة حل المعادلتين : س ـ ٢ص ـ ١ = ٠ ، س^٢^ ـ س ص = ٠

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : س = ١ + ٢ص

بالتعويض عن س = (١ + ٢ص) في معادلة الدرجة الثانية

∴ (١ + ٢ص)^٢^ ـ ص (١ + ٢ص) = ٠ — نفك الأقواس

١ + ٤ص + ٤ص^٢^ ـ ص ـ ٢ص^٢^ = ٠ — نجمع المتشابه

٢ص^٢^ + ٣ص + ١ = ٠ — بالتحليل

إما ص + ١ = ٠ ∴ ص = ـ١ | أو ٢ص + ١ = ٠ ∴ ص = $\frac{-1}{2}$

بالتعويض في المعادلة س = ١ + ٢ص

∴ س = ١ + ٢ × ـ١ ∴ س = ـ١ | ∴ س = ١ + ٢ × $\frac{-1}{2}$ = ٠

م . ح = { (ـ١ ، ـ١) ، (٠ ، $\frac{-1}{2}$) }

٤ أوجد مجموعة حل المعادلتين : س ـ ص = ١٠ ، س^٢^ ـ ٤س ص + ص^٢^ = ٥٢

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : س = ص+١٠

بالتعويض عن س = (ص+١٠) في معادلة الدرجة الثانية

∴ (ص+١٠)^٢^ ـ ٤ص (ص+١٠) + ص^٢^ = ٥٢

ص^٢^ + ٢٠ص + ١٠٠ ـ ٤ص^٢^ ـ ٤٠ص + ص^٢^ ـ ٥٢ = ٠

ـ٢ص^٢^ ـ ٢٠ص + ٤٨ = ٠ — بالقسمة على ـ٢

ص^٢^ + ١٠ص ـ ٢٤ = ٠

(ص + ١٢) (ص ـ ٢) = ٠

إما ص + ١٢ = ٠ ∴ ص = ـ١٢ | أو ص ـ ٢ = ٠ ∴ ص = ٢

بالتعويض في المعادلة س = ص + ١٠

∴ س = ـ١٢+١٠ ∴ س = ـ٢ | ∴ س = ٢ + ١٠ ∴ س = ١٢

م . ح = { (ـ٢ ، ـ١٢) ، (١٢ ، ٢) }

١ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين

ص ـ س = ٣ ، س^{٢} + ص^{٢} ـ س ص = ١٣

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : ....

بالتعويض في معادلة الدرجة الثانية

∴ ....

....

نفك الأقواس

∴ ....

نجمع المتشابه

∴ .... بالتحليل

∴ ....

إما .... | أو ....

∴ .... | ∴ ....

بالتعويض في ....

∴ .... | ∴ ....

.... | ....

∴ م . ح = { (ـ٤ ، ـ١) ، (١ ، ٤) }

٢ مستطيل محيطه ١٤سم ومساحته ١٢ سم^{٢}

أوجد كلا من بعديه

الحل

نفرض أن بُعدا المستطيل هما س ، ص

∵ محيط المستطيل = ٢(الطول + العرض)

∴ ١٤ = ٢(س + ص) بالقسمة على ٢

س + ص = ٧ ومنها ص = ٧ ـ س

∵ مساحة المستطيل = الطول×العرض ∴ س ص = ١٢

بالتعويض عن ص = ٧ ـ س في المعادلة س ص= ١٢

∴ س (٧ ـ س) = ١٢ ٧س ـ س^{٢} = ١٢

٧س ـ س^{٢} ـ ١٢ =٠ نرتب ونغير إشارة الكل

س^{٢} ـ٧س + ١٢ = ٠ (س ـ ٤) (س ـ ٣) = ٠

إما س = ٤ ∴ ص = ٧ ـ ٤ = ٣

أو س = ٣ ∴ ص = ٧ ـ ٣ = ٤

∴ بعدا المستطيل هما ٣سم ، ٤سم

٣ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

ص ـ س = ٢ ، س^{٢} + س ص ـ ٤ = ٠

الحل



٤ أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين :

س +ص =٥ ، س^{٢} + س ص =١٥

الحل





اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 مجموعة حل المعادلتين س ـ ص = ٠ ، س ص = ٩ هي ....

أ) { (٠ ، ٠) } ب) { (-٣ ، -٣) } جـ) { (٣ ، ٣) } د) { (-٣ ، -٣) ، (٣ ، ٣) }

الحل : من المعادلة الأولى: س = ص بالتعويض في الثانية ص^2 = ٩ ∴ ص = ± ٣ بالتعويض في س = ص
عندما ص = -٣ ∴ س = -٣ ، عندما ص = ٣ ∴ س = ٣ ∴ م.ح = { (-٣ ، -٣) ، (٣ ، ٣) }

2 أحد حلول المعادلتين س ـ ص = ٢ ، س^2 + ص^2 = ٢٠ هو ....

أ) { (-٤ ، ٢) } ب) { (٢ ، -٤) } جـ) { (٣ ، ١) } د) { (٤ ، ٢) }

3 مجموعة حل المعادلتين س = ٢ ، س ص = ٦ هى ....

أ) { (٢ ، ٣) } ب) { ٢ ، ٣ } جـ) { (٣ ، ٢) } د) { ٣ }

4 إذا كانت ص = ٢ ، س^2 ـ ص^2 = ٥ فإن س = ...

أ) ـ٣ ب) ٣ جـ) ±٣ د) ٩

5 عددان مجموعهما ٧ وحاصل ضربهما ١٢ هما ....

أ) ٢ ، ٥ ب) ٢ ، ٦ جـ) ٣ ، ٤ د) ١ ، ٦

---

١ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين س ـ ص = ٢ ، س^2 + ص^2 = ٢٠

٢ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين س + ٢ص = ٤ ، س^2 + س ص + ص^2 = ٧

٣ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين س ـ ص = ٠ ، س ص = ٩

٤ عددان مجموعهما ٩٠ وحاصل ضربهما ٢٠٠٠ أوجد العددين

٥ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ سم^2 أوجد محيطه.

٦ مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه يساوى ٣٠ سم أوجد طولى ضلعى القائمة

إعداد أ/ محمود عوض



الدرس الأول 1 — أصفار الدالة

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

- لإيجاد أصفار الدالة نساوى الدالة بالصفر ونحل المعادلة

مثال: إذا كانت د (س) = $س^2 - ٩$ فأوجد أصفار الدالة

الحل: $س^2 - ٩ = ٠$ ∴ $س^2 = ٩$ ∴ س = ±٣ ∴ ص(د) = { -٣ ، ٣ }

- لو كانت د (س) = صفر فإن ص (د) = ح
- أصفار الكسر الجبرى = أصفار البسط – أصفار المقام

(يعنى اللى موجود في أصفار البسط ومش متكرر في أصفار المقام)

الدوال التي أصفارها = Φ

- ($س^2$ + عفريت) ملوش أصفار: زى $س^2 + ٤$ أو $س^2 + ٣$ وهكذا ص(د) = Φ
- في مجموع المكعبين والفرق بينهما : القوس الكبير ملوش أصفار ص(د) = Φ
- لو كانت د(س) = أي عدد (ما عدا الصفر) زى د(س) = ٣ فإن ص(د) = Φ

تدريب : أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال الآتية :

① د (س) = $٢س^3 - ١٨س$

الحل : ....

....

ص (د) = ...

② د (س) = $س^2 + ٢س - ١٥$

الحل : ....

....

ص (د) = ...

③ د (س) = $٢س^3 + ١٦$

الحل : ....

....

ص (د) = ...

ملحوظة : لو أعطاك أصفار الدالة معلومة في المسألة عوّض بيها في الدالة وساوى الدالة بالصفر

مثال ١

إذا كانت { -٣ ، ٣ } هي مجموعة أصفار الدالة د حيث د(س) = $س^2$ + أ فأوجد قيمة أ

الحل

∵ { -٣ ، ٣ } هي مجموعة أصفار الدالة

∴ أي قيمة من هذه القيم تجعل د (س) = ٠

∴ ٣^2 + أ = ٠

٩ + أ = ٠ ∴ أ = -٩

مثال ٢

إذا كانت د(س) = $س^3 - ٢س^2 - ٧٥$

فاثبت أن العدد ٥ أحد أصفار هذه الدالة

الحل

بالتعويض في الدالة عن س = ٥

∴ د (٥) = $٥^3 - ٢ \times ٥^2 - ٧٥$

= ١٢٥ - ٥٠ - ٧٥

= ٠

∵ د (٥) = ٠ ∴ العدد ٥ أحد أصفار الدالة

إعداد أ/ محمود عوض

مجال الكسر الجبرى

٠١٢٠٢٥٦٠٢٣٩



<u>دالة الكسر الجبرى</u> : يرمز لها بالرمز ن(س) أو ق(س) أو د(س) وهي دالة على صورة ن (س) = $\frac{د(س)}{ق(س)}$

مثل : ن (س) = $\frac{س + ٥}{٣}$ ، ن (س) = $\frac{٢س}{٢س +٨}$ ، د (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٧س + ١٢}$

- **مجال الكسر الجبرى = ح – أصفار المقام**

مثال : إذا كان ن (س) = $\frac{س - ١}{س - ٣}$ فإن مجال ن = ح – { ٣ }

- **المجال المشترك لعدة كسور جبرية = ح – مجموعة أصفار المقامات**

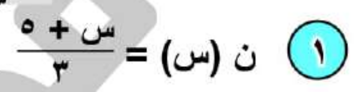
<u>مثال</u>: إذا كان $ن_١$(س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، $ن_٢$(س) = $\frac{س +٣}{(س - ٥)(س + ٧)}$

فإن المجال المشترك لكل من $ن_١$ ، $ن_٢$ = ح – { ١ ، ٥ ، -٧ }

- **ملحوظة : قبل إخراج المجال حلل المقام لو ليه تحليل .**

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

تدريب ١ : عيّن مجال كل من الدوال الكسرية الآتية :



(١) ن (س) = $\frac{س + ٥}{٣}$

الحل

المقام عدد يبقى ملوش أصفار

المجال = ح

(٢) ن (س) = $\frac{س - ٢}{٢س}$

الحل

....

....

(٣) ن (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + س - ٢}$

الحل

....

....

(٤) ن (س) = $\frac{س + ١}{س^٤ - س}$

الحل

....

....

....

(٥) ن (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٤}$

الحل

....

....

....

(٦) ن (س) = $\frac{س + ١}{٤س^٣ - ٩ س}$

الحل

....

....

....

تدريب ٢ : عيّن المجال المشترك لكل من الدوال الكسرية الآتية :

(١) $ن_١$ (س) = $\frac{١}{س^٢ - ١٦}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س + ٥}{س^٢ - ٩س + ٢٠}$

الحل

....

....

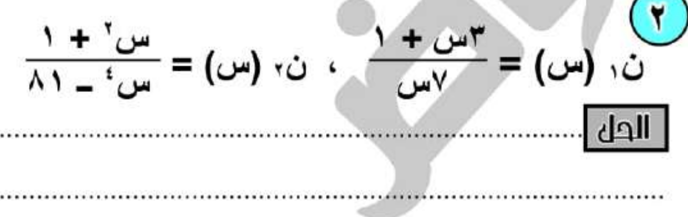
....

....

....

(٢) $ن_١$ (س) = $\frac{٣س + ١}{٧س}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س^٢ + ١}{س^٤ - ٨١}$

الحل



....

....

....

....

....



أمثلة وتدريبات على الأصفار والمجال

١ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة
د(س) = أ س^{٢} + ب س + ١٥ هي {٣ ، ٥}
فأوجد قيمة كل من أ ، ب

الحل

∵ د(٣) = ٠ ∴ ٩ أ + ٣ ب + ١٥ = ٠ بالقسمة ÷ ٣

٣ أ + ب = -٥ ← ١

∵ د(٥) = ٠ ∴ ٢٥ أ + ٥ ب + ١٥ = ٠ بالقسمة ÷ ٥

٥ أ + ب = -٣ ← ٢

بحل المعادلتين بطريقة الحذف

٣ أ + ب = -٥
٥ أ + ب = -٣ بالطرح

-٢ أ = -٢ ∴ أ = ١

بالتعويض في ١ ∴ ٣ + ب = -٥ ∴ ب = -٨

٢ إذا كان مجال الدالة ن(س) = $\frac{\text{س - ١}}{\text{س}^{٢}\text{ - أ س + ٩}}$
هو ح - {٣} فأوجد قيمة أ

الحل

∵ المجال = ح - {٣}

∴ أصفار المقام = ٣

بالتعويض عن س = ٣ ونساوى المقام بالصفر

∴ ٣^{٢} - أ × ٣ + ٩ = ٠

٩ - ٣ أ + ٩ = ٠

١٨ - ٣ أ = ٠

٣ أ = ١٨

∴ أ = ٦

٣ إذا كانت {٥ ، -٣} هي مجموعة أصفار الدالة
د(س) = س^{٢} - ٢ س + أ فأوجد قيمة أ

الحل

....

....

....

....

....

....

٤ إذا كان مجال الدالة د(س) = $\frac{\text{س + ٥}}{\text{س}^{٢}\text{ - أ}}$
هو ح - {٢ ، -٢} فأوجد قيمة أ

الحل

....

....

....

....

....

....

٥ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة ن(س) = $\frac{\text{س - أ}}{\text{س + ب}}$
هى {٥} ، و مجالها هو ح - {٣}
فأوجد قيمتى كل من أ ، ب

الحل

∵ أصفار الكسر الجبرى = {٥}

∴ أصفار البسط = {٥}

٥ - أ = ٠ ∴ أ = ٥

∵ المجال = ح - {٣} ∴ أصفار المقام = {٣}

٣ + ب = ٠ ∴ ب = -٣

٦ إذا كان مجال الدالة ن(س) = $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$ + $\frac{\text{٩}}{\text{س + أ}}$
هو ح - {٠ ، ٤} ، ن(٥) = ٢
فأوجد قيمتى أ ، ب

الحل

∵ المجال = ح - {٠ ، ٤} ∴ أصفار المقام الثانى = ٤

٤ + أ = ٠ ∴ أ = -٤

∴ ن(س) = $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$ + $\frac{\text{٩}}{\text{س - ٤}}$

∵ ن(٥) = ٢ ∴ $\frac{\text{ب}}{\text{٥}}$ + $\frac{\text{٩}}{\text{٥ - ٤}}$ = ٢

$\frac{\text{ب}}{\text{٥}}$ + ٩ = ٢ $\frac{\text{ب}}{\text{٥}}$ = -٧ ∴ ب = -٣٥





اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموعة أصفار الدالة د(س) = س^٢ + ٤ في ح هي ....

أ) { ٢ } ب) { ٢ ، -٢ } جـ) ح د) Φ

② مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = -٣س هى ....

أ) { ٠ } ب) { -٣ } جـ) { (-٣ ، ٠) } د) ح

③ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = س (س^٢ -٢س +١) هى ....

أ) { ٠ ، ١ } ب) { ٠ ، -١ } جـ) { (-١ ، ٠) } د) { ١ }

الحل: ....

④ إذا كانت ص(د) = { ٢ } ، د(س) = س^٣ - م فإن م = ...

أ) $\sqrt[٣]{٢}$ ب) ٢ جـ) ٤ د) ٨

الحل: ....

⑤ إذا كانت ص(د) = { ٥ } ، د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + أ فإن أ = ...

أ) -٥٠ ب) -٥ جـ) ٥ د) ٥٠

الحل: ....

⑥ مجال الدالة ن (س) = $\frac{س}{س - ١}$ هو ....

أ) ح - { صفر } ب) ح - { ١ } جـ) ح - { صفر ، ١ } د) ح - { -١ }

---

[١] إذا كانت { -٢ ، ٢ } هي مجموعة أصفار الدالة د(س) = س^٢ + م فأوجد قيمة م.

[٢] إذا كانت { ٣ ، ٤ } هي مجموعة أصفار الدالة د(س) = أس^٢ + ب س +١٢ فأوجد قيمتى أ ، ب

[٣] أوجد المجال المشترك لكل من : ن$_١$(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦}$ ، ن$_٢$(س) = $\frac{٣س}{س^٢ - س}$

[٤] إذا كان مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{س + ١}{س^٢ + أ س + ٤}$ هو ح - { ٢ } فأوجد قيمة أ




اختزال الكسر الجبرى

خطوات اختزال الكسر الجبرى

- تحليل: تحليل البسط والمقام
- مجال: إخراج المجال = ح ـ أصفار المقام
- حذف: حذف العوامل المتشابهة بين البسط والمقام



مثال

اختصر لأبسط صورة ن(س) = $\frac{س^2 - 1}{س^2 + 4س - 5}$

الحل

التحليل : ن (س) = $\frac{(س - 1)(س + 1)}{(س - 1)(س + 5)}$

المجال : المجال = ح - { 1 ، -5 }

الحذف : ن(س) = $\frac{س + 1}{س + 5}$

تدريب ١

اختصر لأبسط صورة ن(س) = $\frac{س^3 - 1}{س^3 + س^2 + س}$

الحل

التحليل :ـ ....

المجال : ....

الحذف : ....

تدريب ٢

اختصر لأبسط صورة ن(س) = $\frac{س^2 - 4}{س^3 - 8}$

الحل

....
....
....
....
....
....
....

تدريب ٣

اختصر لأبسط صورة ن(س) = $\frac{س^2 - 6س + 9}{2س^2 - 18س}$

الحل

....
....
....
....
....
....
....



متى يتساوى كسرين جبريين

لو عايز تعرف هل : $ن_١ = ن_٢$ أم لا اتبع الآتى :

- اختصر كل كسر لوحده بالخطوات الثلاثة **(تحليل – مجال – حذف)**
- $ن_١ = ن_٢$ إذا تحقق شرطان معًا وهما : ❶ مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$ ❷ $ن_١(س) = ن_٢(س)$ بعد الاختصار النهائي
- لو لقيت **مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$** بينما $ن_١(س) \neq ن_٢(س)$ فإن $ن_١ \neq ن_٢$
- لو لقيت $ن_١(س) = ن_٢(س)$ بينما **مجال $ن_١ \neq$ مجال $ن_٢$** فإن: $ن_١ \neq ن_٢$

ولكن في حالة اختلاف المجالين يكون $ن_١ = ن_٢$ في المجال المشترك فقط

مثال ١

إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س}$ اثبت أن: $ن_١ = ن_٢$

الحل

$ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢} = \frac{س^٢}{س^٢(س - ١)}$

مجال $ن_١$ = ح – {٠ ، ١}

$ن_١(س) = \frac{١}{س - ١}$

$ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س} = \frac{س(س^٢ + س + ١)}{س(س^٣ - ١)}$

$= \frac{س(س^٢ + س + ١)}{س(س - ١)(س^٢ + س + ١)}$

مجال $ن_٢$ = ح – {٠ ، ١}

$ن_٢(س) = \frac{١}{س - ١}$

∵ $ن_١(س) = ن_٢(س)$ ، **مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$**

∴ $ن_١ = ن_٢$

مثال ٢

أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه $ن_١$ ، $ن_٢$ حيث:

$ن_١(س) = \frac{س^٢ + س + ١٢}{س^٢ + ٥س + ٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س^٢ + ٢س + ١}$

الحل

$ن_١(س) = \frac{س^٢ + س + ١٢}{س^٢ + ٥س + ٤} = \frac{(س + ٤)(س - ٣)}{(س + ٤)(س + ١)}$

مجال $ن_١$ = ح – {-٤ ، -١}

$ن_١(س) = \frac{س - ٣}{س + ١}$

$ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س^٢ + ٢س + ١} = \frac{(س - ٣)(س + ١)}{(س + ١)(س + ١)}$

مجال $ن_٢$ = ح – {-١}

$ن_٢(س) = \frac{س - ٣}{س + ١}$

∵ $ن_١(س) = ن_٢(س)$ بينما **مجال $ن_١ \neq$ مجال $ن_٢$**

∴ $ن_١ = ن_٢$ **في المجال المشترك ح – {-٤ ، -١}**

إعداد أ/ محمود عوض




٠١٢٠٢٥٦٠٢٣٩

١ إذا كان $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{٢س}}{\text{٢س} + ٨}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + \text{٤س}}{\text{س}^2 + \text{٨س} + ١٦}$ اثبت أن : $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$

الحل

٢ إذا كان $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{٢س}^3 + \text{٦س}}{(\text{س} - ١)(\text{س}^2 + ٣)}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{٢س}}{\text{س} - ١}$

بيِّن إذا كان $\text{ن}_1 = \text{ن}_2$ أم لا ؟ مع ذكر السبب

الحل

٣ أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتان:

$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + \text{٩س} + ٢٠}{\text{س}^2 - ١٦}$ ، $\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٥}{\text{س}^2 - \text{٤س}}$

الحل

٤ إذا كان $\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - ٤}{\text{س}^2 + \text{س} - ٦}$ ،

$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^3 - \text{س}^2 - \text{٦س}}{\text{س}^3 - \text{٩س}}$ اثبت أن: $\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$

لجميع قيم س التي تنتمى إلى المجال المشترك ، وأوجد هذا المجال

الحل

$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - ٤}{\text{س}^2 + \text{س} - ٦} = \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢)}$

مجال $\text{ن}_1 = \text{ح} - \{-٣ ، ٢\}$

$\boxed{\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٣}}$

$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^3 - \text{س}^2 - \text{٦س}}{\text{س}^3 - \text{٩س}} = \frac{\text{س}(\text{س}^2 - \text{س} - ٦)}{\text{س}(\text{س}^2 - ٩)}$

$= \frac{\text{س}(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)}{\text{س}(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}$

مجال $\text{ن}_2 = \text{ح} - \{-٣ ، ٠ ، ٣\}$

$\boxed{\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٣}}$

$\because$ $\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ بينما مجال $\text{ن}_1 \neq$ مجال ن_2

$\therefore$ $\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ فقط في المجال المشترك

$\text{ح} - \{-٣ ، ٢ ، ٠ ، ٣\}$





اختر الإجابة الصحيحة:

(1) إذا كان $ن_1(س) = \frac{-٧}{س + ٢}$ ، $ن_2(س) = \frac{س}{س - ك}$ وكان المجال المشترك هو ح ـ {-٢ ، ٧} فإن ك = ...

أ) ٢ ب) <u>٧</u> جـ) -٢ د) -٧

(2) إذا كانت $ن_1(س) = \frac{١ + أ}{س - ٢}$ ، $ن_2(س) = \frac{٤}{س - ٢}$ وكان $ن_1(س) = ن_2(س)$ فإن أ = ...

أ) ١ ب) ٢ جـ) <u>٣</u> د) ٤

اختزل كل من الكسور التالية محددا مجالها:

(1) $\frac{س^2 - ١}{(س - ١)(س + ٥)}$

(2) $\frac{٢س^2 + ٧س + ٦}{٤س^2 + ٤س - ٣}$

---

[١] إذا كانت: $ن_1(س) = \frac{س^2 - ٤}{س^2 + س - ٦}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 - س - ٦}{س^2 - ٩}$ بين ما إذا كانت $ن_1 = ن_2$ أم لا مع ذكر السبب

[٢] إذا كانت: $ن_1(س) = \frac{س^2}{س^3 - ٣س^2}$ ، $ن_2(س) = \frac{س}{س^2 - ٣س}$ فاثبت أن $ن_1 = ن_2$

[٣] إذا كانت: $ن_1(س) = \frac{س^2 - ٤}{س^2 + س - ٦}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 - س - ٦}{س^2 - ٩}$ فاثبت أن $ن_1 = ن_2$

[٤] إذا كانت: $ن_1(س) = \frac{٢س^2 + ٦س}{(س - ١)(س^2 + ٣)}$ ، $ن_2(س) = \frac{٢س}{س - ١}$ فاثبت أن $ن_1 = ن_2$

جمع وطرح الكسور الجبرية

إعداد أ/ محمود عوض

خطوات جمع وطرح الكسور الجبرية :

١ ترتيب حدود المقادير (يعنى ١٥ – ١٣ س + ٢س^{٢} رتبه بإشاراته وخليه كده ٢س^{٢} – ١٣س + ١٥)

٢ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن

٣ إخراج المجال المشترك (ح – أصفار المقامات)

٤ حذف العوامل المتشابهة في كل كسر لوحده (اوعى تحذف قوس من الكسر الأول مع قوس من الكسر التانى)

٥ لو لقيت المقامات موحدة : خد مقام منهم وإجمع البسطين أو اطرحهم (حسب العملية) .

زى كده : $\frac{س}{س + ٢} + \frac{٣}{س + ٢} = \frac{س + ٣}{س + ٢}$

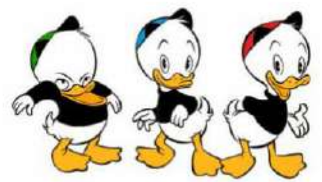
لو المقامات غير موحدة : وحد المقامات كالتالى :

شوف إيه اللى موجود في مقام الأول ومش موجود في مقام التانى واضربه × الكسر التانى كله (بسط ومقام)

وشوف إيه اللى موجود في مقام التانى ومش موجود في مقام الأول واضربه × الكسر التانى كله (بسط ومقام)

زى كده : $\frac{س}{س – ٢} + \frac{س + ٣}{(س – ٣)(س – ٢)}$ هنضرب بسط ومقام الأول × (س – ٣)

هيبقى كده : $\frac{س (س – ٣)}{(س – ٢)(س – ٣)} + \frac{س + ٣}{(س – ٣)(س – ٢)}$



أو كده : $\frac{س}{س + ١} + \frac{١}{س – ١}$ هنضرب بسط ومقام الأول × (س – ١) وهنضرب بسط ومقام التانى × (س + ١)

هيبقى كده : $\frac{س (س – ١)}{(س + ١)(س – ١)} + \frac{س + ١}{(س – ١)(س + ١)}$

٦ اجمع المتشابه في البسط ولو نفع يتحلل حلله و ضع المقدار في أبسط صورة

فمثلا : $\frac{س^{٢} – ٣س + س + ٣}{(س – ٢)(س – ٣)} = \frac{س^{٢} – ٢س + ٣}{(س – ٢)(س – ٣)} = \frac{(س – ٣)(س + ١)}{(س – ٢)(س – ٣)} = \frac{س + ١}{س – ٢}$

ملحوظة هامة

لو لقيت مقدار فيه حدين مطروحين ومش مرتب

زى كده ٣ – س هنخليه كده – (س – ٣)

أو كده ١ – س^{٢} هنخليه كده – (س^{٢} – ١)

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٧س + ١٢} - \frac{٤}{س^٢ - ٤س}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س - ٣}{(س - ٤)(س - ٣)} - \frac{٤}{س(س - ٤)}$$

المجال = ح − { ٤ ، ٣ ، ٠ }

$$ن(س) = \frac{١}{س - ٤} - \frac{٤}{س(س - ٤)}$$

نوحد المقامات : نضرب الكسر الأول × س

$$ن(س) = \frac{س}{س(س - ٤)} - \frac{٤}{س(س - ٤)}$$

خد منهم مقام واطرح البسطين

$$ن(س) = \frac{س - ٤}{س(س - ٤)} = \frac{١}{س}$$

٢ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٢+٢س}{س^٢-٤} + \frac{س + ٣}{س^٢-٥س + ٦}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س(س+٢)}{(س-٢)(س+٢)} + \frac{س+٣}{(س-٣)(س-٢)}$$

المجال = ح − { ٢ ، −٢ ، ٣ }

$$ن(س) = \frac{س}{س-٢} + \frac{س+٣}{(س-٣)(س-٢)}$$

نوحد المقامات : نضرب الكسر الأول × (س − ٣)

$$ن(س) = \frac{س(س-٣)}{(س-٢)(س-٣)} + \frac{س+٣}{(س-٣)(س-٢)}$$

اضرب س × القوس واجمع البسطين

$$ن(س) = \frac{س^٢-٣س + س +٣}{(س-٢)(س-٣)} = \frac{س^٢-٢س + ٣}{(س-٢)(س-٣)}$$

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

٣ أوجد الدالة ن في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٨س +١٢}{س^٢ - ٤س +٤} + \frac{س^٢ - ٤س -٥}{س^٢ - ٧س +١٠}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س-٢)(س-٦)}{(س-٢)(س-٢)} + \frac{(س-٥)(س+١)}{(س-٥)(س-٢)}$$

المجال = ح − { ٢ ، ٥ }

$$ن(س) = \frac{س - ٦}{س-٢} + \frac{س +١}{س-٢}$$

$$= \frac{س - ٦ + س +١}{س -٢}$$

اجمع الحدود المتشابهة اللى في البسط

$$ن(س) = \frac{٢س - ٥}{س -٢}$$

٤ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٢}{س - ١} + \frac{س}{١ - س}$$

الحل

١ − س هنخليه − (س − ١)

$$ن(س) = \frac{س^٢}{س - ١} + \frac{س}{-(س-١)}$$

هنضرب السالب اللى قدام القوس × الـ + بتاعت الجمع

$$ن(س) = \frac{س^٢}{س - ١} - \frac{س}{س - ١}$$

خد بالك ان العملية اتحولت طرح

المجال = ح − { ١ }

$$ن(س) = \frac{س^٢ - س}{س - ١} = \frac{س(س-١)}{س-١} = س$$

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$\text{ن (س)} = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}} + \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} - ٤}$$

الحل

٢ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال :

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س}^{٢} - ١} + \frac{\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥}$$

الحل

٣ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال:

$$\text{ن (س)} = \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤}{\text{س}^{٣} - ٨} - \frac{٩ - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}$$

الحل

٤ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال:

$$\text{ن (س)} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٤} - \frac{\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} - ١٦}$$

الحل

ضرب وقسمة الكسور الجبرية

إعداد أ/ محمود عوض



خطوات ضرب الكسور الجبرية :



١ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن (متنساش العامل المشترك)

٢ إخراج المجال المشترك (ح – أصفار المقامين)

٣ حذف العوامل المشتركة بين أي بسط وأى مقام

يعنى تقدر تحذف قوس من بسط الأول مع اللى شبهه في مقام التانى وهكذا و ده بينفع في الضرب ومش بينفع في الجمع

٤ ضرب البسط × البسط والمقام × المقام

مثال:	الحل:
أوجد ن (س) في أبسط صورة حيث $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} \times \frac{س + ١}{س^٢ - ١}$	$ن (س) = \frac{(س + ٣)(س - ١)}{س + ٣} \times \frac{س + ١}{(س + ١)(س - ١)}$ المجال = ح - { -٣ ، -١ ، ١ } ، ن (س) = ١

قسمة الكسور الجبرية



✵ كل اللى هتعمله انك تحوّل القسمة إلى ضرب كالتالى :

الـ ÷ خليها × ← وشقلب الكسر التانى ← وحل بخطوات الضرب عادى

✵ ملحوظة : فيه اختلاف صغير في مسائل القسمة لما تكتب المجال وهو :

المجال في القسمة = ح – أصفار المقامين وأصفار بسط الثانى

مثال:	الحل:
أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث : $ن (س) = \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} \div \frac{س^٢ - ١}{س + ٥}$	$ن (س) = \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} \times \frac{س + ٥}{س^٢ - ١}$ $= \frac{(س + ٣)(س - ١)}{س + ٣} \times \frac{(س + ٥)}{(س + ١)(س - ١)}$ المجال = ح - { -٣ ، -١ ، ١ ، -٥ } $ن (س) = \frac{س + ٥}{س + ١}$

تصميم محمود عوض معلم رياضيات

أمثلة محلولة

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} + س - ٦} \times \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٢س + ٤}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س + ٣)(س - ٢)} \times \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٢س + ٤}$$

المجال = ح − { ٢ ، −٣ }

ن(س) = ١

٢ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س^{٢} - س} \times \frac{س + ٣}{س^{٢} + س + ١}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}{س(س - ١)} \times \frac{س + ٣}{س^{٢} + س + ١}$$

المجال = ح − { ٠ ، ١ }

$$ن(س) = \frac{س + ٣}{س}$$

٣ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^{٢} + ٢س}{س^{٢} - ٩} \div \frac{٢س}{س + ٣}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س^{٢} + ٢س}{س^{٢} - ٩} \times \frac{س + ٣}{٢س}$$

$$ن(س) = \frac{س(س + ٢)}{(س + ٣)(س - ٣)} \times \frac{س + ٣}{٢س}$$

المجال = ح − { −٣ ، ٣ ، ٠ }

$$ن(س) = \frac{س + ٢}{٢(س - ٣)}$$

٤ إذا كانت $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{٢س^{٢} + ٣س} \div \frac{٣س^{٢} + ٦س - ٤٥}{٤س^{٢} - ٩}$

فأوجد ن(س) في أبسط صورة موضحًا المجال

الحل

$$ن(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{٢س^{٢} + ٣س} \times \frac{٤س^{٢} - ٩}{٣س^{٢} + ٦س - ٤٥}$$

$$ن(س) = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س(٢س + ٣)} \times \frac{(٢س - ٣)(٢س + ٣)}{٣(س^{٢} + ٢س - ١٥)}$$

$$= \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س(٢س + ٣)} \times \frac{(٢س - ٣)(٢س + ٣)}{٣(س + ٥)(س - ٣)}$$

المجال = ح − { ٠ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، −٥ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ }

$$ن(س) = \frac{(س + ٣)(٢س - ٣)}{٣س(س + ٥)}$$

٥ أوجد: $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٤س + ٣}{س^{٣} - ٢٧} \div \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٣س + ٩}$

ثم أوجد ن(٢) ، ن(−٣) إن أمكن

الحل

$$ن(س) = \frac{(س + ٣)(س + ١)}{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)} \times \frac{س^{٢} + ٣س + ٩}{س + ٣}$$

المجال = ح − { ٣ ، −٣ }

$$ن(س) = \frac{س + ١}{س - ٣}$$

$$ن(٢) = \frac{٢ + ١}{٢ - ٣} = -٣$$

ن (−٣) غير ممكنة لأن −٣ ∉ للمجال

٦ أوجد ن(س) وعين مجالها حيث:

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢} \times \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١٠}{٣\text{س}^٣ + ١٦\text{س}^٢ + ٥\text{س}}$$

ثم أوجد ن (٠) ، ن (−١) إن أمكن

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} + ١}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)} \times \frac{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ٥)(٣\text{س} + ١)}$$

المجال = ح − { ٢ ، −١ ، −٥ ، ٠ ، $\frac{-١}{٣}$ }

$$\text{ن (س)} = \frac{١}{٣\text{س} + ١}$$

$$\text{ن} (٠) = \frac{١}{٣ \times ٠ + ١} = ١$$

ن (−١) غير ممكنة لأن −١ ∉ للمجال

٧ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^٢ - ٩} \div \frac{٢\text{س} - ١٠}{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩}$$

الحل

متنساش: الـ ÷ هنخليها × وهنشقلب الكسر التانى

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^٢ - ٩} \times \frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩}{٢\text{س} - ١٠}$$

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} \times \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٣)}{٢(\text{س} - ٥)}$$

المجال = ح − { ٣ ، −٣ ، ٥ }

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٣}{٢}$$



٨ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\text{ن (س)} = \frac{\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٣٦}{\text{س}^٢ - ٦\text{س}} \times \frac{٤\text{س} + ٢٤}{٣٦ - \text{س}^٢}$$

الحل

عارف هنعمل إيه في المقدار ٣٦ − س^٢ !!

هنخليه كده −(س^٢ − ٣٦)

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س} - ٦)(\text{س} - ٦)}{\text{س}(\text{س} - ٦)} \times \frac{٤(\text{س} + ٦)}{-(\text{س} - ٦)(\text{س} + ٦)}$$

المجال = ح − { ٠ ، ٦ ، −٦ }

$$\text{ن (س)} = \frac{-٤}{\text{س}}$$

٩ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث :

$$\text{ن (س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{١ - \text{س}^٢} \div \frac{٣\text{س} - ١٥}{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥}$$

الحل

١ − س^٢ هنخليه −(س^٢ − ١) ونحول الضرب لقسمة

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{-(\text{س}^٢ - ١)} \times \frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥}{٣\text{س} - ١٥}$$

$$= \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}{-(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} \times \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} - ١)}{٣(\text{س} - ٥)}$$

المجال = ح − {١ ، −١ ، ٥}

$$\text{ن(س)} = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}{-٣(\text{س} + ١)}$$

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٢ + س + ١}{س} \times \frac{س^٢ - س}{س^٣ - ١}$$

الحل

....

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$ن(س) = \frac{٣س - ١٥}{س + ٣} \times \frac{٤س + ١٢}{٥س - ٢٥}$$

الحل

....

٣ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث :

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س}{٢س^٢ - س - ٦} \div \frac{٢س^٢ - ٣س}{٤س^٢ - ٩}$$

الحل

....

٤ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٣ - ٢٧} \div \frac{س + ٢}{س^٢ + ٣س + ٩}$$

ثم أوجد ن (٢) ، ن (−٢) إن أمكن

الحل

....

المعكوس الضربى للكسر الجبرى

◆ إذا رمزنا للكسر الجبرى بالرمز ن (س) فإن معكوسه الضربى يرمز له بالرمز $\text{ن}^{-1}(\text{س})$

◆ إذا كان ن (س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ٣}$ فإن $\text{ن}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ١}$ (شقلب الكسر يجيلك معكوسه)

◆ مجال ن^{-1} = ح – أصفار البسط و المقام — من المثال اللى فات: مجال $\text{ن}^{-1}(\text{س})$ = ح – { -٣ ، ١ }

مثال ١

إذا كان ن (س) = $\frac{\text{س}^2 - ٩}{\text{س}^2 + \text{س} - ٦}$

أوجد $\text{ن}^{-1}(\text{س})$ في أبسط صورة مبينًا مجال $\text{ن}^{-1}(\text{س})$

الحل

$\text{ن}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + \text{س} - ٦}{\text{س}^2 - ٩}$ *شقلبنا الكسر*

$= \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٣)}$ *حللنا*

المجال = ح – { –٣ ، ٣ ، ٢ }

$\text{ن}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٣}$ *اختصرنا*

تدريب ١

إذا كان ن (س) = $\frac{\text{س}^2 + ٣\text{س}}{\text{س}^3 + ٢٧}$

أوجد $\text{ن}^{-1}(\text{س})$ في أبسط صورة مبينًا مجال $\text{ن}^{-1}(\text{س})$

الحل

....

مثال ٢

إذا كان ن (س) = $\frac{\text{س}^2 - ٢\text{س}}{\text{س}^2 - ٣\text{س} + ٢}$

فأوجد: (١) $\text{ن}^{-1}(\text{س})$ مبينا مجالها

(٢) قيمة س إذا كان $\text{ن}^{-1}(\text{س}) = ٣$

الحل

$\text{ن}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - ٣\text{س} + ٢}{\text{س}^2 - ٢\text{س}} = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}{\text{س}(\text{س} - ٢)}$

مجال ن^{-1} = ح – { ٠ ، ٢ ، ١ }

$\text{ن}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{\text{س}}$

∵ $\text{ن}^{-1}(\text{س}) = ٣$ ∴ $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}} = ٣$ (مقص)

∴ س – ١ = ٣س ٢س = –١ س = $\frac{-١}{٢}$

تدريب ٢

إذا كان ن (س) = $\frac{\text{س}^2 - ٣\text{س}}{(\text{س} - ٣)(\text{س}^2 + ٢)}$

فأوجد: (١) $\text{ن}^{-1}(\text{س})$ مبينا مجالها

(٢) قيمة س إذا كان $\text{ن}^{-1}(\text{س}) = ٣$

الحل

....





1) إذا كانت س ≠ صفر فإن $\frac{٥س}{س^٢ + ١} \div \frac{س}{س^٢ + ١} =$ ....

أ) ـ ٥ ب) ـ ١ جـ) ١ د) ٥

2) مجال المعكوس الضربى للدالة د(س) = $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ هو ....

أ) { ٣ } ب) ح - {-٢ ، ٣ } جـ) ح - { ٣ } د) ح

3) إذا كان للكسر الجبرى $\frac{س - أ}{س + ٥}$ معكوس ضربى وهو $\frac{س + ٥}{س + ٣}$ فإن أ = ...

أ) ٣ ب) -٥ جـ) -٣ د) ٥

4) أبسط صورة للكسر $\frac{٥س}{س^٢ + ١} \div \frac{س}{س^٢ + ١}$ هى ....

أ) ـ٥ ب) ـ١ جـ) ١ د) ٥

5) إذا كان $\frac{س - ك}{س - ٣}$ معكوس ضربى وهو $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ فإن ك = ...

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ـ٢ د) ـ٣

---

١) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث: ن (س) = $\frac{س^٢ - ٢س + ١}{س^٣ - ١} \div \frac{٢س - ٢}{س^٢ + س + ١}$

٢) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث: ن (س) = $\frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} \div \frac{س^٢ - ١}{س + ١}$

٣) إذا كان ن (س) = $\frac{س^٢ - ٤٩}{س^٣ - ٨} \times \frac{س - ٢}{س + ٧}$ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها ثم احسب قيمة ن (١)

٤) إذا كان ن(س) = $\frac{س - ٢}{س + ١}$ فأوجد : ١) $ن^{-١}$(س) مبينًا مجالها ٢) $ن^{-١}$(٣)

٥) إذا كان ن(س) = $\frac{س^٢ - ٤س - ٥}{س^٢ - ٢٥}$ فأوجد : ١) $ن^{-١}$(س) مبينًا مجالها ٢) $ن^{-١}$(٥)

إعداد أ/ محمود عوض

٠١٢٠٢٥٦٠٢٣٩






الاحتمال

الاتحاد ∪

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

إذا كان أ ، ب حدثان **متنافيان** فإن :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

ملحوظة: امتى يطلب ل (أ ∪ ب) بالطريقة اللفظية؟

لو قلك : أوجد احتمال وقوع الحدث أ أو ب

أو قلك : أوجد احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

إذا كانت أ ⊃ ب فإن : ل (أ ∪ ب) = ل (ب) الكبيرة

مثال

إذا كان ل(أ) = $\frac{1}{2}$ ، ل(ب) = $\frac{1}{3}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{1}{5}$

أوجد : ل (أ ∪ ب)

الحل :

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

ل (أ ∪ ب) = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ – $\frac{1}{5}$ = $\frac{7}{10}$ بالآلة الحاسبة

شكل فن

ف

أ ∪ ب = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ل (أ ∪ ب) = $\frac{\text{عدد عناصر أ ∪ ب}}{\text{العدد الكلى}}$

= $\frac{4}{5}$

التقاطع ∩

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∪ ب)

إذا كان أ ، ب حدثان **متنافيان** فإن :

ل (أ ∩ ب) = صفر ، أ ∩ ب = Φ

ملحوظة: امتى يطلب ل (أ ∩ ب) بالطريقة اللفظية؟

لو قلك : أوجد احتمال وقوع الحدث أ و ب معا

إذا كانت أ ⊃ ب فإن : ل (أ ∩ ب) = ل (أ) الصغيرة

مثال

إذا كان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٦ ،

ل(أ ∪ ب) = ٠,٧ أوجد : ل (أ ∩ ب)

الحل :

ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∪ ب)

= ٠,٢ + ٠,٦ – ٠,٧ = ٠,١

شكل فن

ف

أ ∩ ب = { ١ ، ٢ }

ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{عدد عناصر أ ∩ ب}}{\text{العدد الكلى}}$

= $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$

الفرق ـــ

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

ل (أ ـ ب) = ل (أ) ـ ل (أ ∩ ب)

ل (ب ـ أ) = ل (ب) ـ ل (أ ∩ ب)

إذا كان أ ، ب حدثان **متنافيان** فإن :

ل (أ ـ ب) = ل (أ)

ملحوظة: امتى يطلب **ل (أ ـ ب)** بالطريقة اللفظية؟

لو قالك : أوجد احتمال وقوع الحدث أ **فقط**

أو قالك : احتمال وقوع الحدث أ وعدم وقوع الحدث ب

لو عرفت الفرق والتقاطع فإن :

ل (أ) = ل (أ ـ ب) + ل (أ ∩ ب)

مثال

إذا كان ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٥}$

أوجد : ل (أ ـ ب) ، ل (ب ـ أ)

الحل :

ل (أ ـ ب) = ل (أ) ـ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ ـ $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٣}{١٠}$

ل (ب ـ أ) = ل (ب) ـ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ ـ $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٢}{١٥}$

شكل فن

أ ـ ب : هي العناصر الموجودة في أ ومش موجودة في **ب**

ب ـ أ : هي العناصر الموجودة في **ب** ومش موجودة في أ

أ ـ ب = { ١ ، ٣ }

ل (أ ـ ب) = $\frac{٢}{٥}$

ب ـ أ = { ٤ }

ل (ب ـ أ) = $\frac{١}{٥}$

المكملة /

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

ل (أَ) = ١ ـ ل (أ)

ل (أ) = ١ ـ ل (أَ)

القاعدة العامة :

ل (أ) + ل (أَ) = ١

ملحوظة: امتى يطلب **ل (أَ)** بالطريقة اللفظية؟

لو قالك : أوجد احتمال **عدم** وقوع الحدث أ

مثال

إذا كان ل (أ) = $\frac{١}{٥}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ،

أوجد : ١) ل (أَ) ٢) احتمال عدم وقوع الحدث ب

الحل :

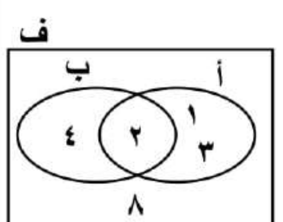
١) ل (أَ) = ١ ـ ل (أ) = ١ ـ $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

٢) **احتمال عدم وقوع الحدث ب : يقصد به ل (بَ)**

ل (بَ) = ١ ـ ل (ب) = ١ ـ $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

شكل فن

أَ : هي كل العناصر اللى قدامك ما عدا عناصر أ



أَ = { ٤ ، ٨ }

ل (أَ) = $\frac{٢}{٥}$

بَ = { ١ ، ٣ ، ٨ }

ل (بَ) = $\frac{٣}{٥}$

تصميم محمود عوض معلم رياضيات



١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ∩ب) = ٠,٢
أوجد : ل (أ ∪ ب) ، ل (أ − ب)

الحل

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل(أ ∩ ب)
= ٠,٣ + ٠,٦ − ٠,٢ = ٠,٧

ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)
= ٠,٣ − ٠,٢ = ٠,١

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان ل(أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(أ∪ب) = $\frac{٥}{٨}$
أوجد : ل (أ ∩ ب) ، ل (ب − أ)

الحل

ل(أ∩ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)
= $\frac{٣}{٨}$ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٥}{٨}$ = $\frac{٢}{٨}$ = $\frac{١}{٤}$

ل (ب − أ) = ل (ب) − ل(أ ∩ ب)
= $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان ل(أ)= ٠,٨ ، ل(ب)= ٠,٧ ، ل(أ∩ب)= ٠,٦
فأوجد: (١) احتمال عدم وقوع الحدث أ
(٢) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

الحل

احتمال عدم وقوع الحدث أ معناه ل (أَ)
ل (أَ) = ١ − ل (أ)
= ١ − ٠,٨ = ٠,٢

احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل معناه ل (أ ∪ ب)
ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل(أ ∩ ب)
= ٠,٨ + ٠,٧ − ٠,٦ = ٠,٩

٤ إذا كان أ ، ب حدثين **متنافيين** من تجربة عشوائية
وكان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$
فأوجد ل (ب)

الحل

∵ أ ، ب حدثان متنافيان ∴ ل (أ ∩ ب) = صفر
∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)
∴ $\frac{٧}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$ + ل (ب)
∴ ل (ب) = $\frac{٧}{١٢}$ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٧}{١٢}$ − $\frac{٤}{١٢}$ = $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

٥ صندوق يحتوى على ١٢ كرة منها ٥ كرات زرقاء ، ٤ كرات حمراء وباقى الكرات بيضاء ، سحبت كرة عشوائيا فاحسب احتمال أن تكون الكرة :
(١) زرقاء (٢) ليست حمراء (٣) زرقاء أو حمراء

الحل

العدد الكلى = ١٢ ، عدد الكرات البيضاء = ٣

احتمال أن تكون زرقاء = $\frac{\text{عدد الكرات الزرقاء}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٥}{١٢}$

احتمال ليست حمراء = $\frac{\text{عدد الكرات الزرقاء والبيضاء}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٨}{١٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

احتمال زرقاء أو حمراء = $\frac{\text{عدد الكرات الزرقاء والحمراء}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٩}{١٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

٦ إذا كان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد : ل(أ ∪ ب) ، ل (أ − ب)

الحل

....
....
....
....
....
....

٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل (ب) = $\frac{١}{١٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$

فأوجد ل(أ) إذا كان: ① أ ، ب متنافيان

② ب ⊂ أ

الحل

أولاً : إذا كان أ ، ب متنافيان :

∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

$\frac{١}{٣}$ = ل (أ) + $\frac{١}{١٢}$

ل(أ) = $\frac{١}{٣}$ - $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

ثانيا : إذا كانت ب ⊂ أ :

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ)   الاتحاد = الكبيرة

∴ ل (أ) = $\frac{١}{٣}$

٨ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل (أ) = ٠,٥ ، ل(أ∪ب) = ٠,٨ ، ل(ب)= س

فأوجد قيمة س إذا كان : ① أ ، ب متنافيان

② ل (أ ∩ ب) = ٠,١

الحل

أولاً : إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان :

∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

٠,٨ = ٠,٥ + ل (ب)

ل (ب) = ٠,٨ – ٠,٥ = ٠,٣

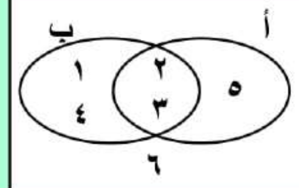
ثانيا : إذا كان ل (أ ∩ ب) = ٠,١

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

٠,٨ = ٠,٥ + ل(ب) – ٠,١

ل(ب) = ٠,٨ – ٠,٤ = ٠,٤

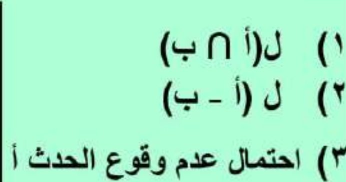
٩ باستخدام شكل فن المقابل أوجد :



١) ل(أ ∩ ب)

٢) ل (أ - ب)

٣) احتمال عدم وقوع الحدث أ



الحل

العدد الكلى ف = ٦

١) أ ∩ ب = { ٢ ، ٣ }   عدد العناصر = ٢

ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{عدد عناصر أ ∩ ب}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

---

٢) أ – ب = { ٥ }   عدد عناصره = ١

ل(أ – ب) = $\frac{\text{عدد عناصر أ - ب}}{\text{العدد الكلى}}$ = $\frac{١}{٦}$

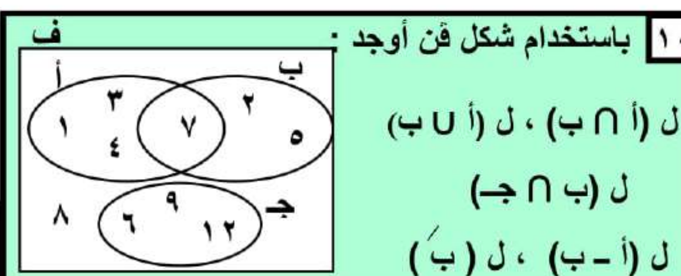
---

٣) احتمال عدم وقوع أ يقصد به ل (أ َ)

أ َ = { ١ ، ٤ ، ٦ }   عدد عناصره = ٣

ل (أ َ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

١٠ باستخدام شكل فن أوجد :



ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب)

ل (ب ∩ جـ)

ل (أ – ب) ، ل (ب َ)

الحل

انت أقوى من شكل فن

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل(أ) = $\frac{٤}{٩}$ ، ل(ب) = $\frac{٣}{٩}$ ، ل(أ∩ب) = $\frac{١}{٩}$

أوجد : ل (أ ∪ ب) ، ل (أ – ب)

ل (ب – أ) ، ل (أ)

الحل

....

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد ل (أ ∪ ب)

إذا كان: (١) ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ (٢) أ، ب متنافيان

الحل

....

٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٥

، ل (أ ∪ ب)= ٠,٢

أوجد : ل(أ∩ب) ، ل (ب – أ)

الحل

....

٤ كيس به ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ ، سحبت بطاقة عشوائيا ، أوجد احتمال أن تكون البطاقة تحمل عددا :

(١) يقبل القسمة على ٣ و يقبل القسمة على ٥

(٢) يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة على ٥

الحل

....



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن ل (أ ∩ ب) = ...

أ) صفر ب) ١ جـ) ٠,٥ د) Φ

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن أ ∩ ب = ...

أ) Φ ب) صفر جـ) ٠,٥٦ د) ١

(٣) إذا كانت أ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما وكان ل (أ) = ٢ ل (أ َ) فإن ل (أ) = ...

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{٢}{٣}$ د) ١

(٤) إذا كان ل (أ) = ل (أ َ) فإن ل (أ َ) = ...

أ) صفر ب) ١ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) $\frac{١}{٢}$

(٥) إذا كان أ ⊂ ب فإن ل (أ ∪ ب) تساوى ....

أ) صفر ب) ل (أ) جـ) ل (ب) د) ل (أ ∩ ب)

(٦) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين وكان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فإن ل (ب) = ...

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

---

(٧) إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو ٦٥٪ فإن احتمال عدم وقوعه يساوى ....

أ) ٠,٣٥ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) ٠,٦٥ د) ١

(٨) إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو ٧٥٪ فإن احتمال عدم وقوعه هو ....

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) ١

(٩) إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوى ....

أ) صفر% ب) ٢٥٪ جـ) ٥٠٪ د) ١٠٠٪

(١٠) إذا ألقى حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجى وظهور عدد فردى يساوى ....

أ) صفر ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{٣}{٤}$ د) ١

(١١) إذا ألقى حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أكبر من ٤ يساوى ....

أ) صفر ب) $\frac{٢}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٦}$



١) إذا كانت النسبة بين محيطى مربعين ١ : ٢ فإن النسبة بين مساحتيهما = ... ١ : ٤

٢) المعكوس الجمعى للكسر $\frac{٣}{س^{٢}+١}$ هو ...... $\frac{-٣}{س^{٢}+١}$

٣) إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو ...... ٣ – س

أ) ٣ + س ب) ٣س جـ) ٣ – س د) $\frac{٣}{س}$

٤) إذا كان $أ^{٢} - ب^{٢} = ٢١$ ، أ + ب = ٧ فإن أ – ب = ... ٣

٥) إذا كان عمر رجل الآن س سنة فإن عمره بعد ٥ سنوات هو ...... س + ٥ وعمره منذ ٣ سنوات هو ...... س – ٣

٦) احتمال الحدث المستحيل = ... صفر بينما احتمال الحدث المؤكد = ... ١

٧) إذا كان $س^{٢} - ص^{٢} = ٢ (س + ص)$ فإن س – ص = ... ٢

٨) إذا كان (٥ ، س – ٧) = (ص + ١ ، –٥) فإن س + ص = ... ٢+٤ = ٦

٩) الدالة د حيث $د(س) = س^{٦} + ٢س^{٤} - ٣$ كثيرة حدود من الدرجة ...... السادسة

١٠) إذا كان منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٢} - أ$ يمر بالنقطة (١ ، ٠) فإن أ = ... ١

١١) عددان موجبان مجموعهما ٧ ، وحاصل ضربهما ١٢ فإن العددين هما ...... ٣ ، ٤

١٢) إذا كان ٢س = ١ فإن $\frac{١}{٥}$ س = ... $\frac{١}{٥} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٠}$

١٣) مجموعة حل المعادلة ٢س + ٤ = ٠ في ط هى ......

١٤) إذا كان المقدار $س^{٢}$ + ك س + ٣٦ مربعا كاملا فإن ك = ... ± ١٢

١٥) إذا كان $٥^{س} = ٤$ فإن $٥^{س-١}$ = ... $٥^{س} \times ٥^{-١} = ٤ \times \frac{١}{٥} = \frac{٤}{٥}$

١٦) إذا كان $٣^{س+٧} = ١$ فإن س = ... –٧

١٧) إذا كان $٣^{س} + ٣^{س} + ٣^{س}$ = ... $٣^{س} \times ٣ = ٣^{س+١}$

١٨) $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = ٨ + ... ٢

١٩) مجموعة حل المعادلة $س^{٢} + ٤ = ٠$ في ح هي ......

٢٠) إذا كانت $س^{٢} ص^{-٢} = ٨١$ فإن $\frac{س}{ص}$ = ...

٢١) [١ ، ٥] ∪ [–٢ ، ٣] = ...

نهاية الجبر